

GIẢI TÍCH TỔ HỢP

I. Hoán vị.

VD 1: Có bao nhiêu cách sắp xếp bốn bạn An, Bình, Chi, Dung ngồi vào một bàn học gồm 4 chỗ ?

Cách 1: Gọi An: A ; Bình: B ; Chi: C ; Dung: D
ABCD, ABDC, ACBD, ACDB, ADBC, ADCB
BACD, BADC, BCAD, BCDA, BDAC, BDCA
CABD, CADB, CBAD, CBDA, CDAB, CDBA
DABC, DACB, DBAC, DBCA, DCAB, DCBA

Cách 2: Dùng quy tắc nhân

Có $4.3.2.1 = 24$ cách

Ví dụ 2: Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên gồm 5 chữ số khác nhau?

$5.4.3.2.1 = 120$ số

* Định nghĩa

Cho tập hợp A gồm n phần tử ($n \geq 1$). Mỗi kết quả của sự sắp xếp thứ tự n phần tử của tập A đgl một **hoán vị** của n phần tử đó.

* Số các hoán vị

Kí hiệu P_n là số các hoán vị của n phần tử, ta có

$$P_n = n(n-1)(n-2)....2.1 = n!$$

Qui ước: $0! = 1$

VD 3: Mỗi cách sắp xếp 10 HS là một hoán vị của 10 phần tử.

Số cách sắp xếp là $P_{10} = 10!$

II/ Chỉnh hợp:

VD1: Trên mặt phẳng, cho 4 điểm phân biệt A, B, C, D . Liệt kê tất cả các vectơ khác $\vec{0}$ mà điểm đầu và điểm cuối của chúng thuộc tập điểm đã cho.

Cách 1: Liệt kê.
 $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}, \vec{BA}, \vec{BC}, \vec{BD},$
 $\vec{CA}, \vec{CB}, \vec{CD}, \vec{DA}, \vec{DB}, \vec{DC}$

Cách 2: Dùng quy tắc nhân

$$\text{Có } 4.3 = 12 \text{ cách} \Rightarrow A_4^2 = 12$$

* Định nghĩa

Cho tập A gồm n phần tử ($n \geq 1$). Kết quả của việc lấy k phần tử khác nhau từ n phần tử của tập A và sắp xếp chúng theo một thứ tự nào đó đgl một **chỉnh hợp chập k** của n phần tử đã cho.

Nhận xét: Hai chỉnh hợp chập k của n phần tử đã cho khác nhau ở chỗ:

- Hoặc có phần tử ở chỉnh hợp này không ở chỉnh hợp kia;
- Hoặc thứ tự sắp xếp của các phần tử trong chúng khác nhau

***Định lí:** Kí hiệu A_n^k là số các chỉnh hợp chập k của n phần tử ($1 \leq k \leq n$), ta có

$$A_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

VD2: Có bao nhiêu số tự nhiên gồm năm chữ số khác nhau được lập từ các chữ số 1; 2; ...; 9?

Mỗi số là một chỉnh hợp chập 5 của 9 phần tử. $\Rightarrow$ Có $A_9^5 = 15120$ số.

III/ Tổ hợp

VD1: Trên mặt phẳng, cho 4 điểm phân biệt A, B, C, D sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Hỏi có thể tạo nên bao nhiêu tam giác mà các đỉnh thuộc tập 4 điểm đã cho?

Các tam giác tạo được ABC, ABD, ACD, BCD

* Định nghĩa

Giả sử tập A có n phần tử ($n \geq 1$). Mỗi tập con gồm k phần tử của A đgl một **tổ hợp chập k** của n phần tử đã cho.

Qui ước: Gọi tổ hợp chập 0 của n phần tử là tập rỗng.

***Định lí:** Kí hiệu C_n^k là số các tổ hợp chập k của n phần tử, ta có $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, ($0 \leq k \leq n$)

VD2: Một tổ có 10 người gồm 6 nam và 4 nữ. Cần lập một đoàn đại biểu gồm 5 người. Hỏi có bao nhiêu cách lập:

- Nếu 5 đại biểu là tùy ý.
- Nếu trong đó có 3 nam và 2 nữ.

Giải

a). Là tổ hợp chập 5 của 10 phần tử. $C_{10}^5 = 252$

b). Chọn 3 nam: C_6^3 cách

Chọn 2 nữ: C_4^2 cách

$\Rightarrow$ Có $C_6^3 \cdot C_4^2 = 120$ cách

***Tính chất các số C_n^k**

$$a) \quad C_n^k = C_n^{n-k}, \quad (0 \leq k \leq n)$$

$$b) \quad C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k, \quad (1 \leq k \leq n)$$